A 55-a OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Al V-LEA TEST DE SELECŢIE PENTRU OIM 25 mai 2004

Subiectul 1. Trei cercuri $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3$ de raze respectiv R_1, R_2, R_3, trec prin punctul O, şi se mai întâlnesc două câte două în punctele A, B, C. Punctul O se află în interiorul triunghiului ABC.

Fie A_1, B_1, C_1 punctele de intersecţie ale dreptelor AO, BO, CO cu laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Fie $\alpha = OA_1/AA_1, \beta = OB_1/BB_1, \gamma = OC_1/CC_1$ şi fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că

$$\alpha R_1 + \beta R_2 + \gamma R_3 \geq R.$$

Subiectul 2. Pe o tablă de şah $n \times m$ se numeşte *mutare* următoarea succesiune de operaţii:

(i) alegerea unor pătrăţele nemarcate, oricare două nesituate pe aceeaşi linie sau coloană;

(ii) marcarea cu 1 a acestora;

(iii) marcarea cu 0 a tuturor pătraţelelor nemarcate ce se află pe aceeaşi linie sau coloană cu un pătrăţel marcat 1 (chiar marcate cu 1 la mutări precedente).

Numim *joc* o succesiune de mutări ce se încheie în momentul în care nici o mutare nu mai este posibilă.

Care este suma maximă a numerelor de pe tablă la sfârşitul unui joc?

Subiectul 3. Fie p un număr prim şi $f \in \mathbf{Z}[X]$ dat prin

$$f = a_1 + a_2 X + \cdots + a_{p-1} X^{p-2},$$

unde a_i este simbolul Legendre al lui i relativ la p, i.e. $a_i = 1$ dacă $i^{(p-1)/2} \equiv 1$ şi $a_i = -1$ altfel, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, p-1$. Să se arate că

a) f se divide în $\mathbf{Z}[X]$ prin $X - 1$, dar nu prin $(X-1)^2$, dacă şi numai dacă $p \equiv 3 \pmod 4$.

b) Dacă $p \equiv 5 \pmod 8$, atunci f se divide în $\mathbf{Z}[X]$ prin $(X-1)^2$, dar nu prin $(X-1)^3$.

Timp de lucru 4 ore şi 30 de minute